

## Моделирование нестационарных процессов в турбомашинах на основе нелинейно-гармонического NLH-метода с использованием суперкомпьютеров

Ю.Я. Болдырев<sup>1</sup>, А.О. Рубцов<sup>1</sup>, Ю.В. Кожухов<sup>2</sup>, А.А. Лебедев<sup>2</sup>, И.В. Чеглаков<sup>2</sup>,  
А.М. Данилишин<sup>2</sup>

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Институт прикладной математики и механики<sup>1</sup>, Институт энергетики и транспортных систем<sup>2</sup>

Целью работы является апробация нелинейно-гармонического метода NLH (Non-linear harmonic), предназначенного для моделирования нестационарного аэродинамического взаимодействия ротора и статора в турбомашинах, отличающегося высокой скоростью вычислений в сравнении с подходами полномасштабного нестационарного расчёта течения. Расчеты нестационарных течений в турбомашине относятся к классу вычислительно ресурсоемких задач и для решения реальных задач за приемлемое время требуется использование суперкомпьютеров. На кафедре «Компрессорной, вакуумной и холодильной техники» в целях апробации получены решения двухмерных и трёхмерных течений в турбомашине с применением NLH метода, реализованного в программном комплексе NUMECAFine/Turbo. К настоящему времени проведено сравнение нестационарного течения со стационарным, получены картины течений и рассмотрен вопрос о консервативности параметров течения.

### Введение

В проектировании турбомашин необходимо учитывать нестационарные процессы для обеспечения надежной работы машин и установок. В осевых и центробежных компрессорах работа в области малой производительности может приводить к вращающемуся срыву, так называемому помпажу – локальной и глобальной потери устойчивости течения, соответственно. Также могут возникать такие аэроупругие явления как, например – флаттер. Указанные нестационарные процессы ведут к появлению вибраций, повышенного шума, дополнительных динамических напряжений в элементах проточной части, что может привести к серьезной поломке и аварии турбомашин. Следует указать и на то обстоятельство, что в осевых турбомашине играет значение, и так называемый нестационарный клокинг-эффект (Clocking-effect- эффект тактовой синхронизации), позволяющий повысить КПД машины за счет взаимодействия двух последовательно расположенных роторов или статоров с одинаковым числом лопаток в лопаточных венцах.

Проведение нестационарных исследований на экспериментальных стендах достаточно дороги и требуют значительной квалификации исследователя. Однако с появлением передовых вычислительных методов моделирования турбулентности класса URANS (Unsteady Reynolds average Navie-Stoks) стоимость численного эксперимента оказывается на порядок ниже натурального. Такие численные исследования проводились на кафедре «Компрессорной, вакуумной и холодильной техники» (КВиХТ) [1] на суперкомпьютере. Так для нестационарного расчета полной окружности рабочего колеса и безлопаточного диффузора центробежного компрессора потребовалось 30 234 880 элементов расчетной сетки, при этом использовалось 6 вычислительных узлов кластера, с 24 вычислительными ядрами и 32 Гб RAM. Расчет только на режиме вращающегося срыва потребовал 14000 итераций и занимал порядка 12 суток. В связи с этим очевидно, что проблема времени расчета значительно обострится при моделировании течений для полных многоступенчатых нестационарных процессах в турбомашине с учетом всех междисковых зазоров и лабиринтных уплотнений, а также подводящих и отводящих газ камер.

В настоящее время существует два подхода снижения времени расчета: во-первых - это увеличение вычислительных ресурсов для решения данного класса задач; и, во-вторых, - это применение новых подходов к их численному решению.

В рамках первого подхода в Политехническом университете Петра Великого создается Суперкомпьютерный центр, с суммарной пиковой вычислительной мощностью около 1 Pflor/s..

Далее мы остановимся на одном из наиболее перспективных вариантов численного решения рассматриваемого класса задач, основанного на представленных в 1996 году в работах [2, 3] по методу нелинейных гармоник (NLH). Этот метод обеспечивает приближенное решение нестационарных задач при существенном уменьшении объема вычислений.

## Математическая основа NLH метода

Изначально метод NLH разрабатывался для моделирования течений в межлопаточном пространстве в турбомашинах. Течение в таком случае считается квази-трехмерным, а именно оно разбивается на слои, в каждом из которых считается двумерным. Областью решения является подпространство вращающихся декартовых координат, при этом частота вращения совпадает с частотой ротора рассматриваемой турбомшины. Предполагается, что течение описывается уравнениями Навье-Стокса движения вязкой жидкости, которые будучи записаны в интегральной форме в случае квази-трехмерного приближения на движущейся поверхности  $\Delta A$  имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Delta A} U dA + \oint_S [(F - V_x) dy + (G - V_y) dx] = \iint_{\Delta A} S dA, \quad (1)$$

здесь символом  $S$  обозначен контур поверхности  $\Delta A$ ,

$$U = h \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ r \rho v \\ \rho e \end{pmatrix} - \text{вектор переменных состояния,}$$

$$F = h \begin{pmatrix} \rho u - \rho u_g \\ \rho u u + P - \rho u u_g \\ r(\rho u v - \rho v u_g) \\ (\rho e + P)u - \rho e u_g \end{pmatrix}, G = h \begin{pmatrix} \rho v - \rho v_g \\ \rho u v + P - \rho u v_g \\ r(\rho v v - \rho v v_g) \\ (\rho e + P)v - \rho e v_g \end{pmatrix} - \text{вектора конвективных потоков,}$$

$S = (0, 0, P \frac{\partial h}{\partial x}, 0)^T$  - вектор внешних воздействий,  $u_g$  и  $v_g$  - скорости движения расчетной

сетки, следующей за вращением и вибрацией лопаток. Векторные слагаемые, учитывающие эффекты вязкости (вязкие члены) имеют вид

$$V_x = h \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ r \tau_{xy} \\ -q_x + u \tau_{xx} + v \tau_{xy} \end{pmatrix}, V_y = h \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ r \tau_{yy} \\ -q_y + u \tau_{xy} + v \tau_{yy} \end{pmatrix},$$

где, ...,  $q_y$  соответствующие компоненты тензора скоростей деформаций и вектора потока тепла, выражающиеся формулами:

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3} \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \tau_{yy} = \frac{2}{3} \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right), \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}, q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2)$$

Для замыкания системы уравнений необходимо определить значение давления, которое в случае идеального газа находится из формулы:

$$P = \left(\frac{C_p}{C_v} - 1\right) \left(\rho e - \frac{1}{2} \rho(u^2 + v^2)\right),$$

где  $C_p$  и  $C_v$  известные постоянные. Динамическая вязкость  $\mu$ , входящая в уравнения для напряжений (2) представляется как обычно в виде суммы ламинарной и турбулентной вязкостей:  $\mu = \mu_l + \mu_t$ . Ламинарная вязкость рассчитывается исходя из закона Сазерленда, а турбулентная – из стандартной алгебраической модели Болдуина-Ломакса. Коэффициент теплопроводности  $k$  рассчитывается из значения динамической вязкости  $\mu$  из равенства для числа Прандтля:  $Pr = \mu c_p / k$ .

Ключевым предположением метода является допущение о том, что течение может быть разделено на две составляющие: стационарный поток и малые возмущения.

$$U(x, y, t) = \bar{U}(x, y) + U' \quad (3)$$

Аналогично, в таком виде представляются вязкие члены, координаты узлов расчетной сетки и скорости движения расчетной сетки.

После подстановки полученных представлений для всех величин в форме (3) в уравнение (1) и осреднения его по времени имеем:

$$\begin{aligned} \oint_S [(\bar{F} - \bar{V}_x) d\bar{y} + (\bar{G} - \bar{V}_y) d\bar{x} + (\bar{F}' dy') + (\bar{G}' dx') - (\bar{v}_x' dy') - (\bar{v}_y' dx')] = \quad (4) \\ = \iint_{\Delta A} \bar{S} d\bar{A} + \overline{(S' dA')} \end{aligned}$$

Заметим, что обычно, амплитуда движения узлов сетки для задач расчета течения в турбомашине относительно невелика и можно пренебречь дополнительными слагаемыми, содержащими нестационарную составляющую координат узлов сетки.

$$\oint_S [(\bar{F} - \bar{V}_x) d\bar{y} + (\bar{G} - \bar{V}_y) d\bar{x}] = \iint_{\Delta A} \bar{S} d\bar{A} \quad (5)$$

Если подставить те же представления величин в форме (3) в уравнение (1) и вычесть осредненную по времени составляющую в виде уравнения (5) получим соотношение для нестационарных колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Delta A} (\bar{U} d\bar{A}' + U' d\bar{A}') + \oint_S [(\bar{F} - \bar{V}_x) dy' + (\bar{G} - \bar{V}_y) dx' + (F' - V_x') d\bar{y} + (G' - V_y') d\bar{x}] = \quad (6) \\ = \iint_{\Delta A} S' d\bar{A}' - \bar{S} d\bar{A}' \end{aligned}$$

Члены второго порядка, входящие в слагаемые этого уравнения, предполагаются пренебрежительно малыми и исключаются из рассмотрения.

Далее используется метод гармоник, в рамках которого традиционно нестационарные возмущения потока представляются в виде:

$$U' = \tilde{U} e^{i\omega t}, \quad (7)$$

где  $\tilde{U}$  - вектор амплитуд переменных сохранения. Координаты узлов расчетной сетки и её скорости также представляются в гармоническом виде. Подставляя выражения вида (7) в (6) получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \oint_S [(\bar{F} - \bar{V}_x) d\bar{y} + (\bar{G} - \bar{V}_y) d\bar{x} + (\tilde{F} - \tilde{V}_x) d\bar{y} + (\tilde{G} - \tilde{V}_y) d\bar{x}] \\ = \iint_{\Delta A} \tilde{S} d\bar{A}' - \bar{S} d\bar{A}' - i\omega \iint_{\Delta A} \tilde{U} d\bar{A}' - i\omega \iint_{\Delta A} \bar{U} d\bar{A}' \quad (8) \end{aligned}$$

Показывается [2, 3], что для численного решения полученных уравнений (5) и (8), необходимо привести их к гиперболическому виду. Для этого вводится переменная псевдовремени  $t'$  и проводится замена переменной  $t$ . Следует заметить, что для решения осредненного по времени уравнения (5) необходимы дополнительные уравнения. Такими

уравнениями выступают выражения, связывающие так называемые «нестационарные напряжения», которыми являются выражения для турбулентных пульсаций вида  $\overline{u'v'}$ , входящие в состав конвективных потоков, со значениями амплитуд и фаз нестационарных колебаний, получаемых из уравнения для гармонических колебаний для первой гармоники следующего вида

$$\overline{u'v'} = \frac{1}{T} \int_0^T u'v' dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_u A_v \sin(\omega t + \phi_u) \sin(\omega t + \phi_v) d(\omega t) = \frac{1}{2} A_u A_v \cos(\phi_u - \phi_v) \quad (9)$$

Для n-гармоник имеем:

$$\overline{u'v'} = \sum_{i=1}^{N_p} \overline{(u'v')_i} \quad (10)$$

При этом для совместного решения уравнений (5) и (8) используется, так называемый, метод сопряжения с сильной связью. В этом методе уравнения (5) и (8) решаются одновременно, с использованием схемы Рунге-Кутты 4-ого порядка.

Как отмечалось в отличие от других современных математических моделей, применяемых для расчета нестационарных течений, в которых решается трехмерная задача, метод нелинейных гармоник позволяет перейти к квази-трехмерной, которая, по сути, представляется собой набор двумерных задач. За счет такого подхода в методе NLH решение задач идет гораздо быстрее, при этом мы получаем высокую точность результатов. Однако, как и в случае трехмерных нестационарных моделей, для того, чтобы решать реальные задачи, необходимо использовать высоко - качественные расчетные сетки, состоящие из большого числа элементов. При этом следует учитывать и то естественное обстоятельство, что в методе NLH число выбранных (рассчитываемых) гармоник  $N_p$  сильно влияет как на точность получаемых результатов, так и на необходимые вычислительные ресурсы. Из-за этого применение суперкомпьютерных технологий является важным аспектом при использовании данного метода.

## Некоторые результаты

К настоящему времени на кафедре «Компрессорная, вакуумная и холодильная техника» накоплен определенный опыт практического применения метода NLH, реализованного в программном комплексе NUMECAFine/Turbo [4] для двухмерных и трёхмерных течений вязкого газа в турбомашинах. В целях апробации возможностей метода NLH были проведены расчеты двухмерных течений в цилиндрических вырезах высотой в одну расчетную ячейку для турбинной ступени и компрессорной осевой ступени, состоящей из статора, ротора и статора.

В турбинной ступени рассматривалась проницаемость энтропии через межсеточную границу между вращающимся неподвижным лопаточным аппаратом и рабочим колесом и определялось значение КПД в зависимости от количества гармоник  $N_p$ . Повышение энтропии показывает распределение низкоэнергетических зон в газе, таких как вихревые зоны и места схода газа с лопаток. На рисунке 1 слева показана картина распределения энтропии при расчёте с 3 гармониками, заметна низкая консервативность параметра. На рисунке справа показано распределение энтропии при расчёте с 10 гармониками, с заметно лучшим сохранением значений поля энтропии при прохождении через межсеточную границу. Это подтверждается графиком на рис. 2, на котором заметны побочные явления метода: возникновение паразитных возмущений, которые тем меньше, чем больше гармоник используется в расчёте. Расчёты сравнивались по адиабатному КПД:

$$\eta_{ad} = \frac{T_{выхода}^* - T_{выхода}}{T_{выхода}^* - T_{выхода} \cdot \tau} \quad , \quad (10)$$

где  $T^*$ ,  $T$  - полная и статическая температура на входе и выходе из расчетной области, а

$$\tau = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 - \text{газодинамическая функция; } \lambda = \frac{a}{\sqrt{kRT_{кр}}} - \text{коэффициент скорости } a - \text{ скорость}$$

звука,  $k$  - коэффициент изэнтропии,  $R$  - универсальная газовая постоянная,  $T$  - температура.

Расхождения по КПД для расчёта с тремя гармониками составили - 0,23% по сравнению со стационарным решением, и - 0,18% для расчёта с 10 гармониками.

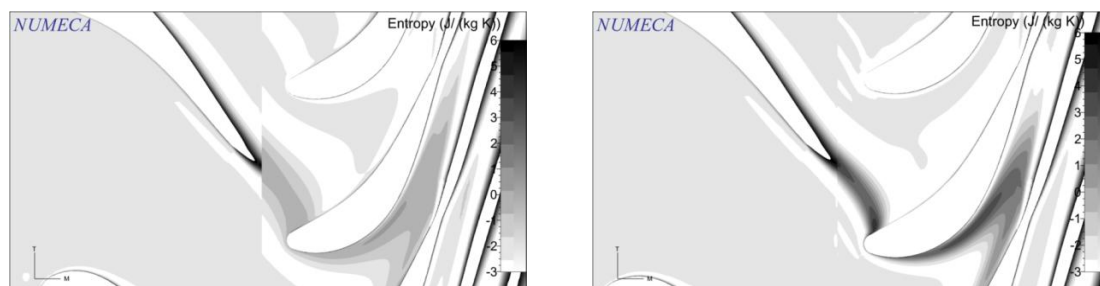


Рис. 1. Распределение энтропии на роторе и статоре через межсеточную границу при 3 (слева), 10 (справа) гармониках

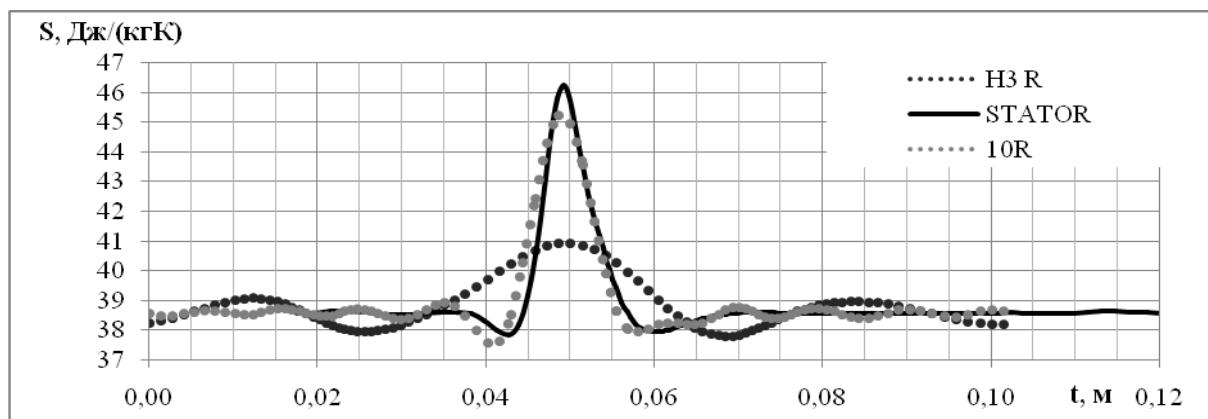


Рис. 2. Проницаемость энтропии через межсеточную границу. Чёрная линия – Энтропия перед границей (STATOR), чёрный пунктир – энтропия при расчёте с 3 гармониками со стороны ротора (H3 R), серый пунктир – 10 гармоник, со стороны ротора (10R).

В компрессорной ступени с высоконагруженными сверхзвуковыми лопатками было отмечено изменение режима течения на рабочих лопатках: метод NLH в осреднённой картине течения показал менее интенсивное распределение скоростей и иное положение скачка уплотнения в сравнении с расчётом в стационарной постановке. Сравнить картины распределения числа Маха в относительном движении можно на рисунке 3: слева – стационарное решение, справа – решение методом NLH. Различие по политропному КПД составило 0,5% между решениями.

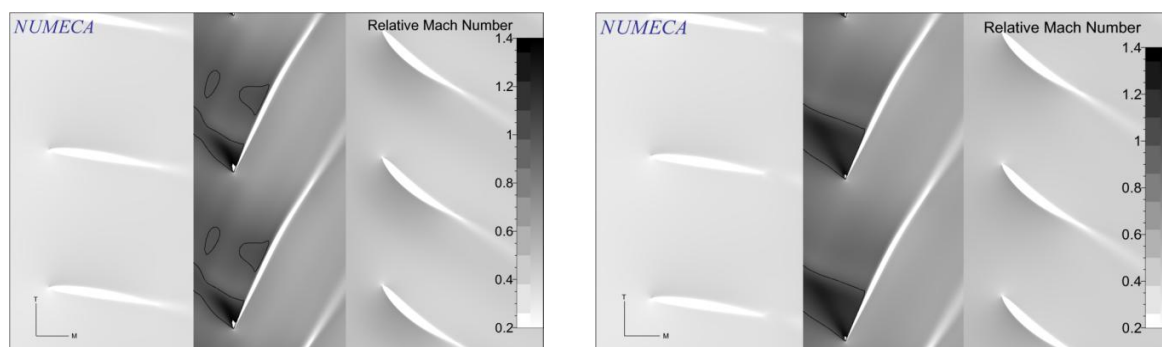


Рис. 3. Распределения числа Маха в относительном движении, стационарное решение

Также была рассчитана промежуточная малорасходная ступень центробежного компрессора высокого давления (рис. 4), в которую входит рабочее колесо, безлопаточный диффузор, поворотное колено и обратно-направляющий аппарат. Расчеты показали, что нестационарность, инициируемая рабочим колесом (точка 2), падает на два порядка к концу безлопаточного диффузора (точка 4). Данный эффект был неоднократно замечен экспериментально в ходе работ на кафедре КВиХТ. На рисунке 4 показано сечение ступени с положением контрольно-измерительных точек, в которых измерялась амплитуда полного давления, которая отображена на графике рисунка 5.

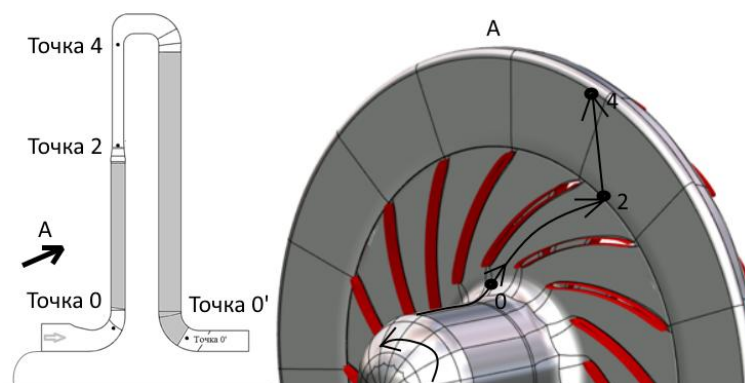


Рис. 4. Расчётная область центробежной компрессорной ступени

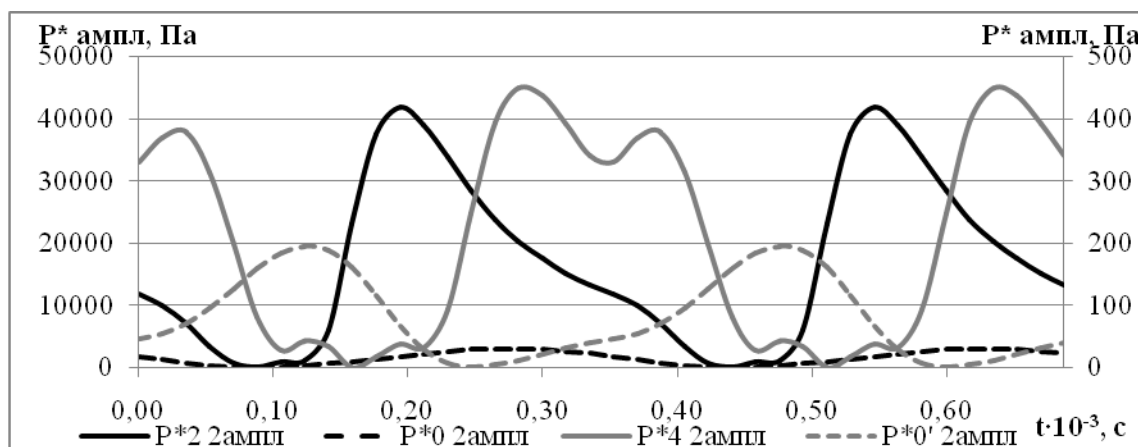


Рис. 5. График удвоенных амплитуд полного давления в контрольных сечениях центробежной компрессорной ступени

Расчеты показали необходимость учета числа гармоник, которые используются в вычислениях для соблюдения условия консервативности параметров. Получены данные о различии характера течения при нестационарном и стационарном расчетах. В наши ближайшие планы входит проведение комплекса исследований с целью верификации NLH метода, оценки выигрыша в вычислительных ресурсах и времени расчета при использовании мощных суперкомпьютерных ресурсов.

## Литература

1. Лопулалан, Хенри Домингус. Виртуальный стенд для исследования нестационарных процессов в ступени центробежного компрессора [Текст]: дис. канд. техн. наук: 05.04.06 / Лопулалан Хенри Домингус; Санкт-Петербургский государственный политехнический университет.

2. He, L., "Modelling Issues for Computation of Unsteady Turbomachinery Flows," *Unsteady Flows in Turbomachines*, von K'arm'an Inst. Lecture Series 1996-05, von Karman Inst. for Fluid Dynamics, Rhode Saint Genese, Belgium, March 1996.
3. L. He and W. Ning, "An Efficient Approach for Analysis of Unsteady Viscous Flows in Turbomachinery", *AIAA Journal*, Vol.36, No.11, 1998.
4. Vilmin, S., Lorrain E., and Hirsch, C.: Unsteady Flow Modeling Across the Rotor/Stator Interface Using the Nonlinear Harmonic Method, ASME Paper GT-2006-90210, (2006)